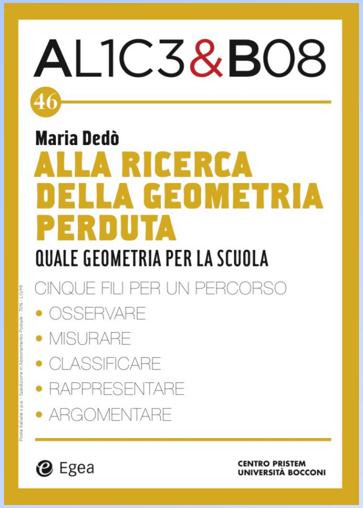
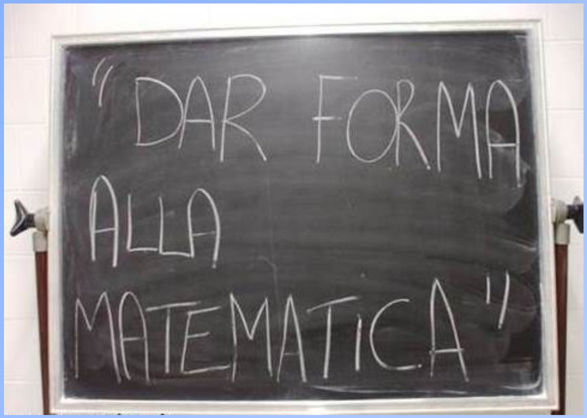
Uno sguardo geometrico sul mondo

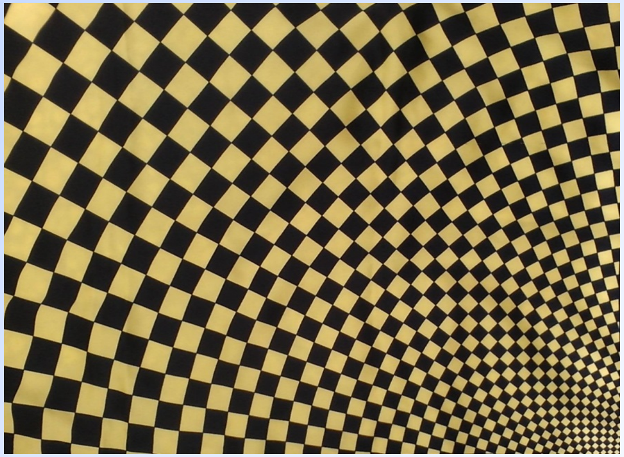
Convegno Pristem + mateinitaly
Giochi matematici e non solo: sfide e parole-chiave
Roma, 30 settembre 2017
M. Dedò

La geometria nella scuola è un *grande assente*; spesso si riduce a ciò che si racconta *con i numeri*: la misura, soprattutto (soltanto?) con le *formule* (perimetro, area, volume; e (più avanti) la geometria analitica.





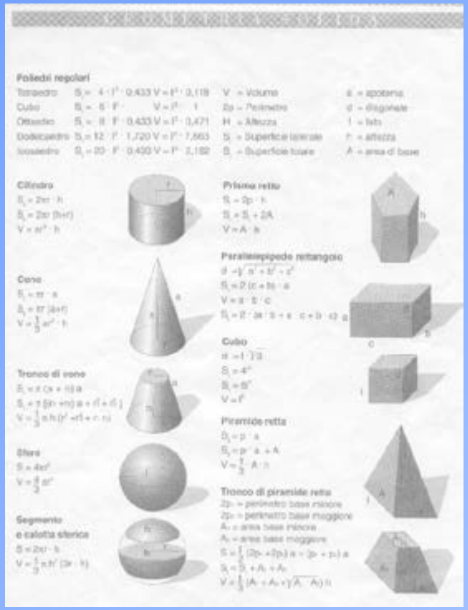
Ma insegnare geometria significa (soprattutto) abituare a ***pensare in termini geometrici***.



Nel seguito:

- le **formule** (cosa sì, cosa no; come);
- i **modelli** e la geometria con le **mani**.

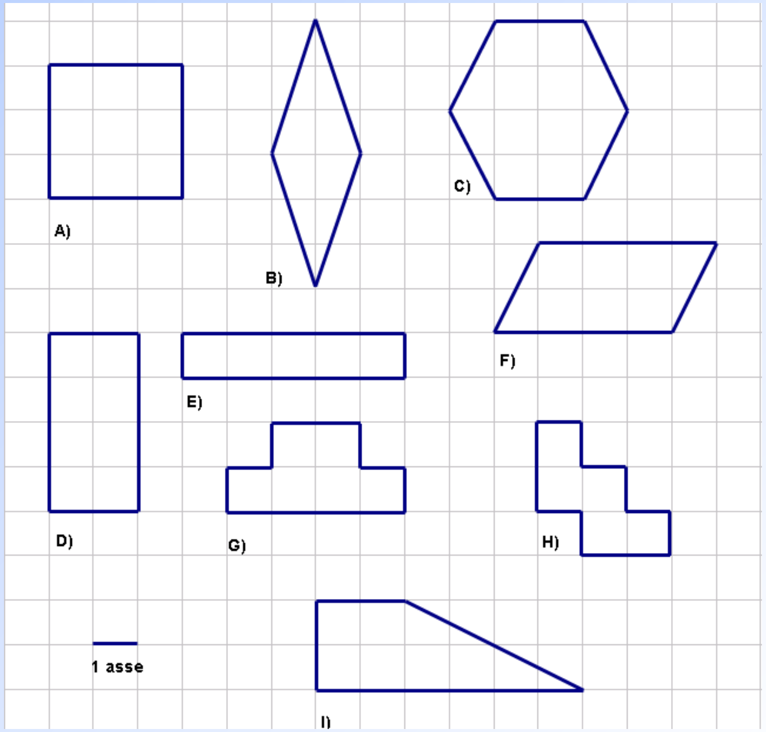
La geometria e le formule



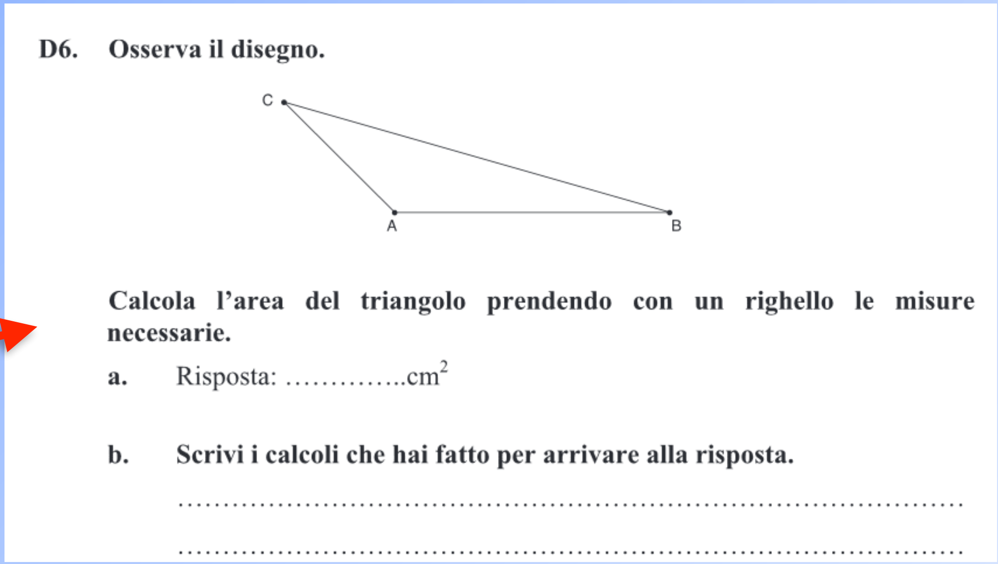
il volume della sfera qual è? quattro terzi pi greco erre tre!

Formule imparate troppo presto diventano formule prive di *significato*…
Non servono proprio a nulla!

Ragazzi del secondo anno di scuola superiore asseriscono di non saper decidere quali fra questi poligoni ha un perimetro maggiore di 12 (unità di misura = il lato di un quadretto) perché *non si ricordano la formula per il perimetro di un parallelogrammo*.



Ragazzi del secondo anno di scuola superiore (*recitano* correttamente la formula per l'area di un triangolo, ma) non sanno risolvere questo problema. E sbagliano quest'altro:



D6. Osserva il disegno.

Calcola l'area del triangolo prendendo con un righello le misure necessarie.

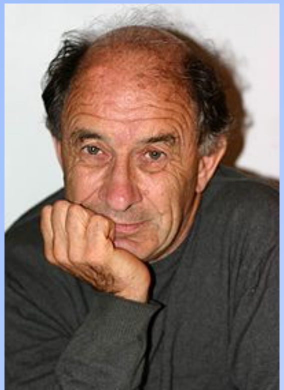
a. Risposta: …………..cm^2

b. Scrivi i calcoli che hai fatto per arrivare alla risposta.

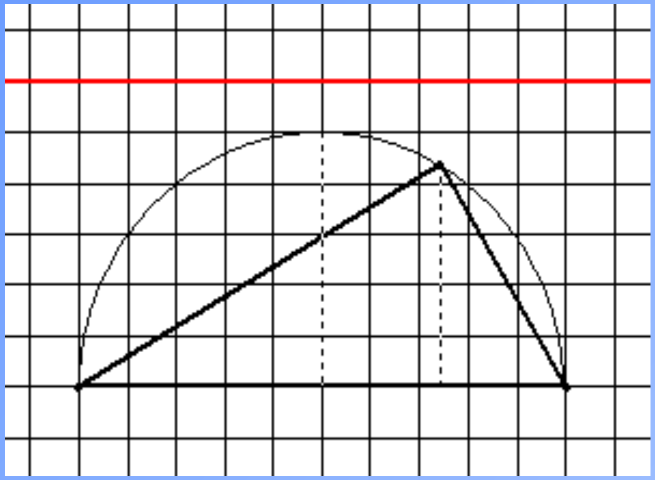
…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Un problema standard in una scuola americana: l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è di 10 cm e l'altezza relativa all'ipotenusa di 6 cm; trovare l'area del triangolo. Gli studenti hanno affrontato questo problema per più di un decennio (trovando come risposta 30 cm^2). Ma gli studenti russi arrivati da Mosca non sono riusciti a risolverlo come i loro colleghi americani. Perché?



Tratto dalla raccolta di V.I. Arnold, *Problems for children from 5 to 15*, https://imaginary.org/sites/default/files/5to15_it_it.pdf



Saper recitare “*Base per altezza diviso 2*” deve essere un **aiuto**, non una **gabbia**!

Invece, che cosa converrebbe che i ragazzi acquisissero (***presto***):

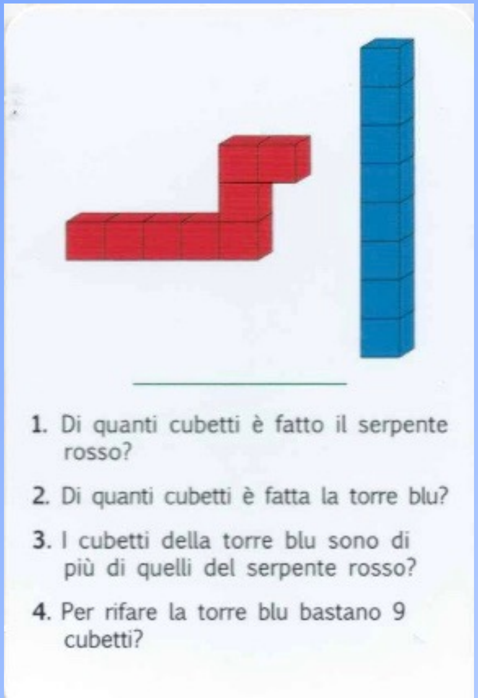
- che cosa sono perimetro, area e volume;
- che cosa vuol dire misurare;
- che cos’è una formula, quando ci si può aspettare una formula;
- come si fa a leggere e interpretare una formula.

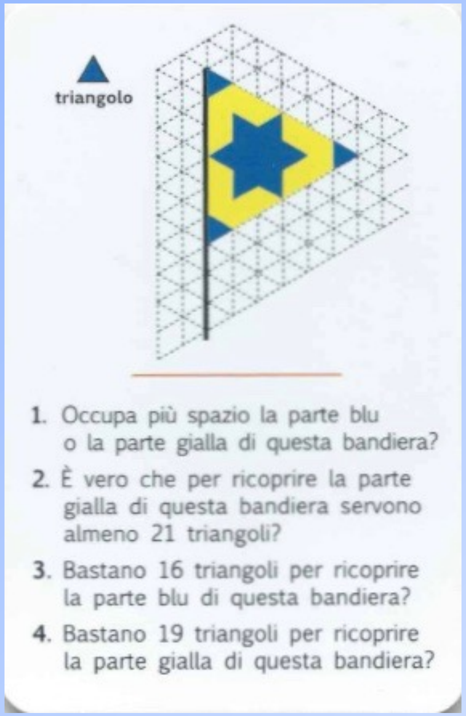
Presto = in un percorso che **cominci** in III primaria e si concluda con la III classe della scuola secondaria di I grado.

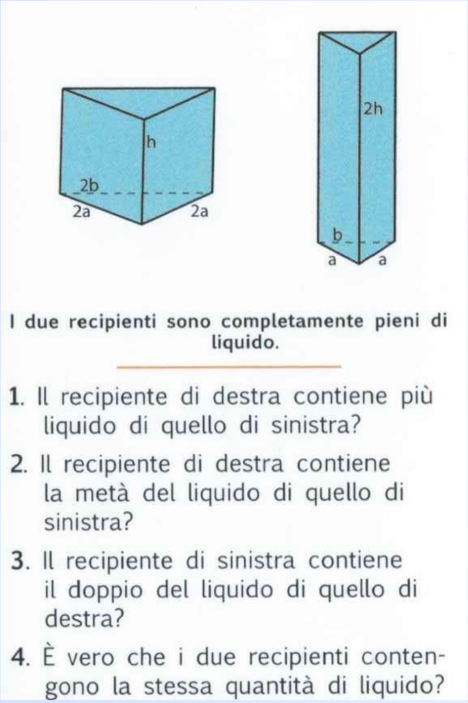
Come: problemi, problemi, problemi!

Che cosa sono perimetro, area e volume?

Ci sono problemi, su perimetro, area, e volume, che si possono porre già nella scuola primaria, e si possono discutere e risolvere *con le mani*, senza bisogno di formule.







Lo scopo di questi problemi è soprattutto far interiorizzare *che cosa sono* perimetro, area, e volume. Più tardi, porranno le premesse per *leggere e interpretare* le formule.

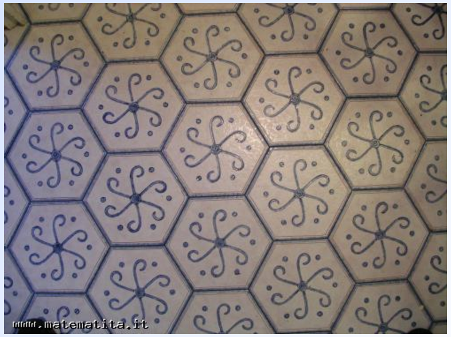
Che cosa vuol dire misurare?

Non ci sono solo le equivalenze!
17 m = 1700 cm = …

Misurare = stimare un rapporto (il rapporto fra una certa grandezza e una dello stesso tipo che si è prefissata come unità di misura).

Misurare è un'operazione strutturalmente diversa rispetto al *contare*: richiede un altro tipo di numeri, e apre questioni come gli ordini di grandezza, le approssimazioni…

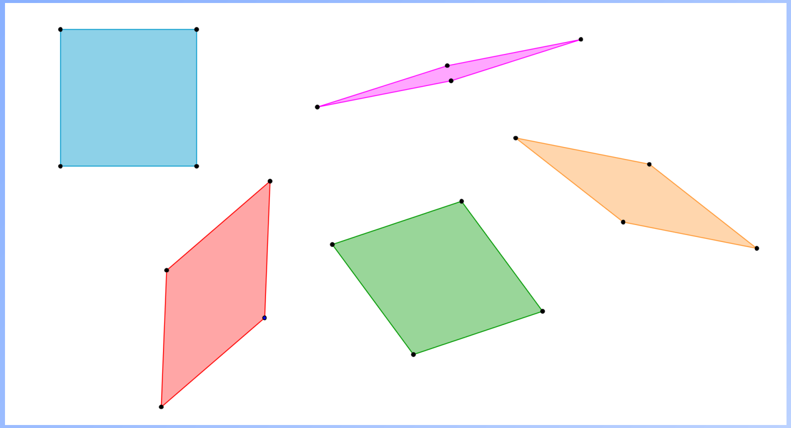
Sono questioni che si esploreranno più avanti, però… intanto sarebbe bene che i pavimenti delle cucine non avessero sempre un numero intero di piastrelle, nemmeno alla scuola primaria!



Che cos'è una formula? *Quando* c'è una formula?

Antonio *Non mi ricordo più com'è la formula che dà l'area del rombo quando si conosce il lato.*
Barbara *Ma te lo sogni: non esiste una formula del genere.*
A. *Certo che esiste! sei tu che non te la ricordi!*

Barbara ha ragione. Ma come fa a convincere Antonio?

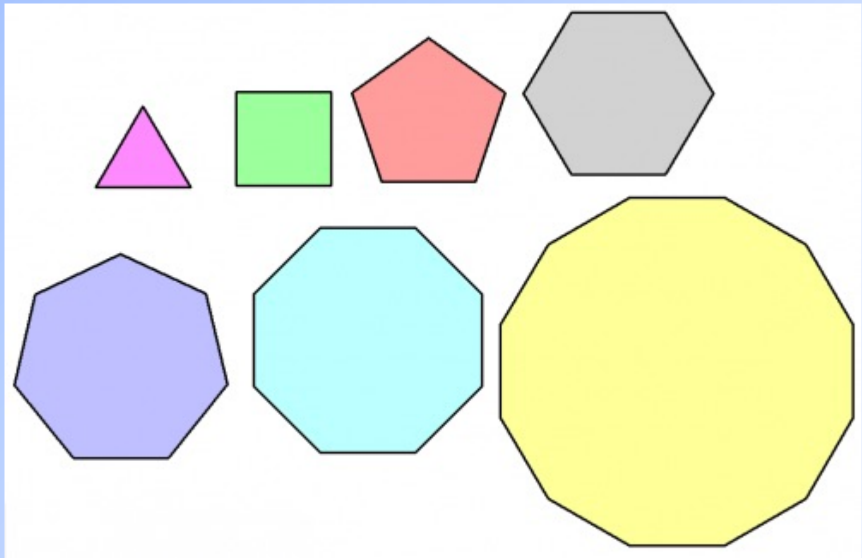


Ci sono rombi con lo stesso lato e area diversa *quindi non può esistere* una formula che dia l'area in funzione del lato.

Questa è un'argomentazione che *taglia la testa al toro* e dà ragione a Barbara. E (*verticalità…!*) è addirittura un passo avanti in direzione del *concetto di funzione*.

Che cos’è una formula? *Quando* c’è una formula?

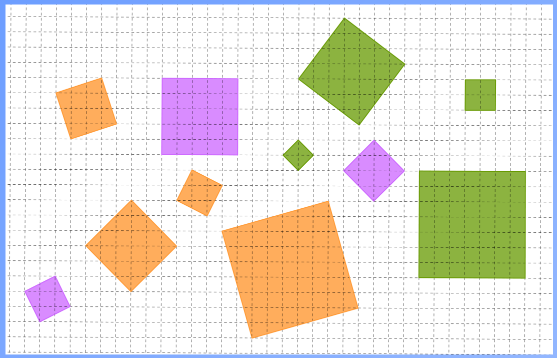
A e **B** osservano questa figura con i poligoni regolari di 3-4-5-6-7-8-12 lati, e sono incuriositi in particolare da quello viola con 7 lati.



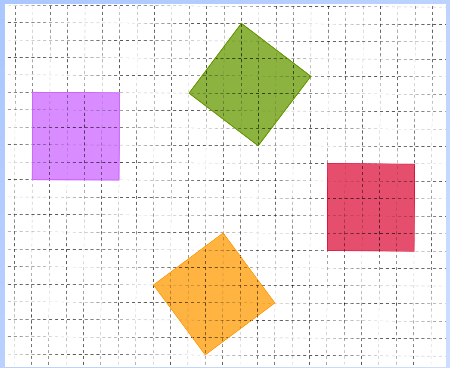
B. *Chissà come è fatta la formula che dà l’area del poligono regolare con 7 lati quando sappiamo quanto è lungo il lato.*

A. *Ma tu sei matta: come può esistere una formula del genere? bisognerà sapere tantissime altre cose oltre alla lunghezza del lato!*

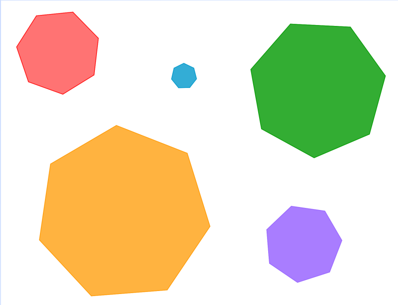
Ancora Barbara ha ragione.
Ma come fa a convincere Antonio?



Il punto è la similitudine!



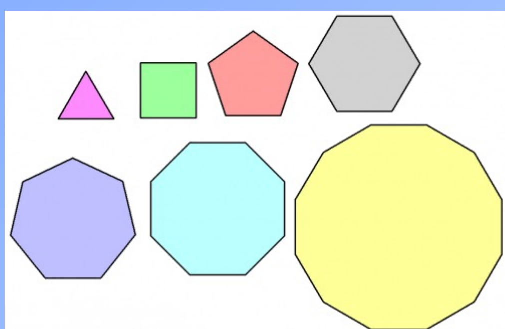
Tutti i quadrati sono *simili*; se si fissa la lunghezza del lato, tutti i quadrati con il lato di *quella* misura sono uguali (isometrici) e quindi hanno la stessa area. Ci sarà allora una formula che dà l'area a partire dal lato. La conosciamo ed è $A = l^2$.



Ma anche i poligoni regolari di 7 lati sono tutti simili: ognuno si ottiene da un altro con uno *zoom*.

Fissata la lunghezza del lato, tutti i poligoni regolari con 7 lati e il lato di *quella* misura sono uguali (isometrici) e quindi hanno la stessa area. Ci sarà (anche se non la conosciamo) una formula che dà l'area a partire dal lato. Lo sappiamo *a priori*!

Anche tutti i cerchi sono simili. La loro *taglia* dipende solo da *un* dato (che può essere la lunghezza r del raggio) e ognuno si ottiene da un altro con uno *zoom*. Tutti i cerchi con lo stesso raggio sono uguali e hanno la stessa area. Anche in questo caso siamo sicuri *a priori* che esiste una formula che dà l'area A a partire dal raggio r.



Si può dire di più: la formula che dà l'area A di un poligono regolare a partire dalla lunghezza l del lato è del tipo

$$A = \text{qualcosa} \times l^2.$$

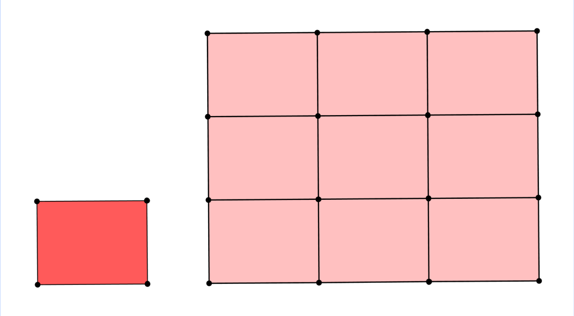
E quella che dà l'area A del cerchio a partire dalla lunghezza r del raggio è del tipo

$$A = \text{qualcosa} \times r^2.$$

… e qui spunta anche π…!

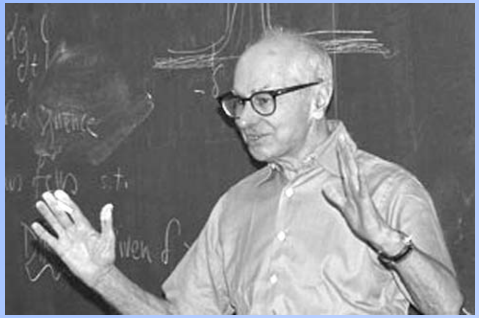
Ma perché?

Partiamo da un quadrato:
raddoppiando il lato l'area quadruplica.



Vale anche per un rettangolo, se lo si ingrandisce con uno *zoom*.

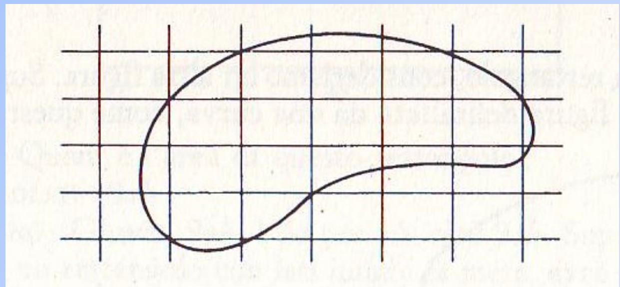
Con un ingrandimento (o rimpicciolimento) in scala 1:r, i lati a e b diventano ra e rb e quindi l'area ab del primo rettangolo diventa $ra\, rb = r^2ab$ per il secondo rettangolo.

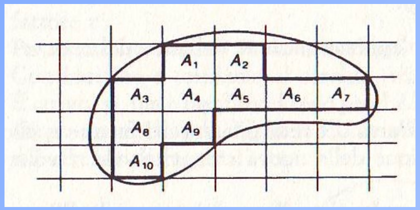


Un consiglio di lettura.
Serge Lang: *La bellezza della matematica*.
In appendice un dialogo di Lang con ragazzi (quindicenni) sul tema: *Che cos'è pi greco*?

Primo passo: ingrandendo (o rimpicciolendo) una figura in un rapporto r, l'area aumenta (o diminuisce) in un rapporto r^2.

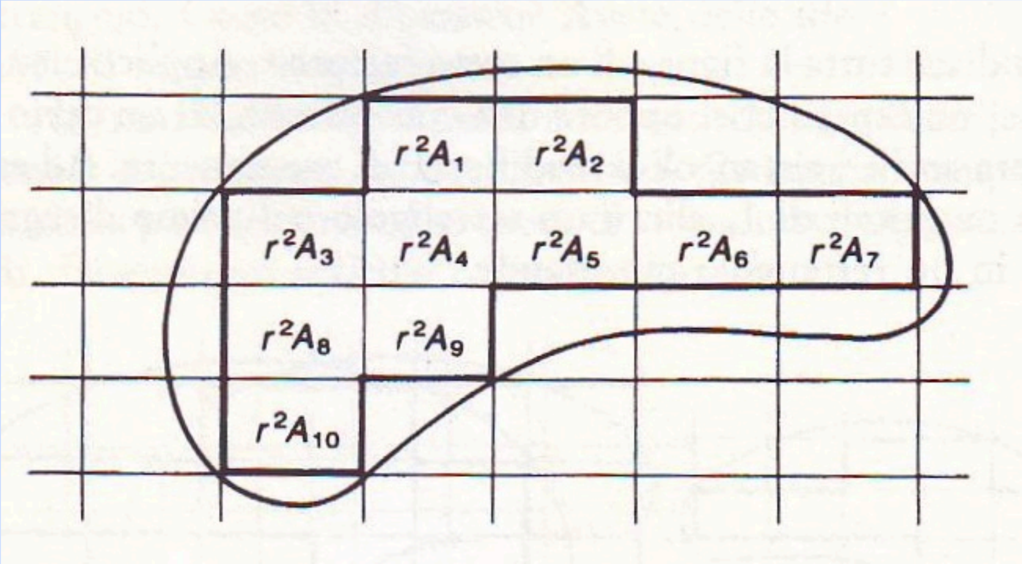
Vale per i rettangoli. Ma anche per una figura qualsiasi?



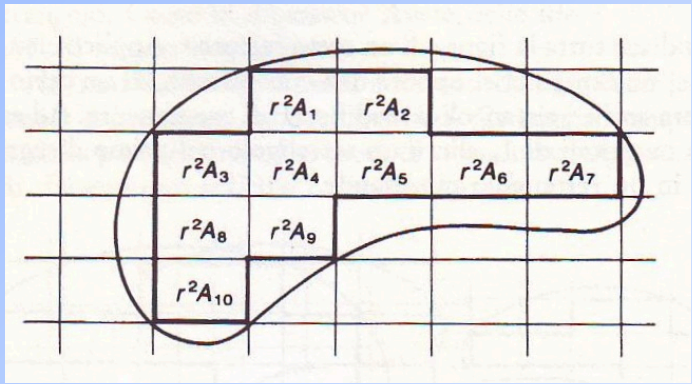


Il filo del discorso è semplice: si ricopre la figura (qualsiasi) con rettangoli, e si applica lo stesso *zoom* sia alla figura che ai rettangoli.

Il **numero** di *rettangoli grandi* nella figura grande è uguale al **numero** dei *rettangoli piccoli* nella figura piccola. L'area di un rettangolo grande è r^2 per l'area di un rettangolo piccolo (r>1).



L’area del poligono grande (fatto di rettangoli grandi, che approssima l’area della *patata* grande) è r^2 per l’area del poligono piccolo (fatto dello *stesso numero* di rettangoli piccoli, che approssima l’area della *patata* piccola).



Si possono usare reticolati sempre più fitti…

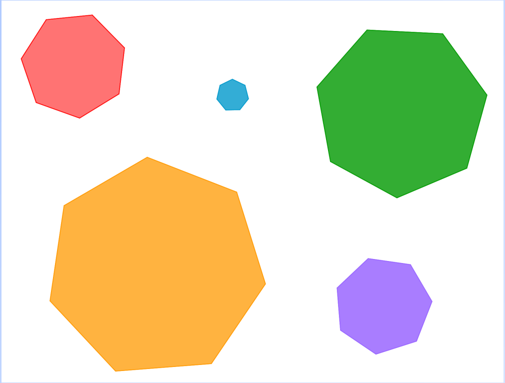
… e quindi anche le aree delle due patate sono legate da
(Area della patata grande) = r^2 x (Area della patata piccola).

Lo stesso discorso vale per due triangoli equilateri, o per due poligoni regolari di 7 lati, o per due cerchi, o per due papere, o per … due qualsiasi figure che siano *simili*, cioè che si ottengano l’una dall’altra con uno *zoom*.

Si è parlato di area. E il perimetro? E il volume?

Naturalmente c'è una formula che dà il perimetro *P* di un poligono regolare a partire dalla lunghezza *l* del lato ed è del tipo

$$P = \text{qualcosa} \times l.$$



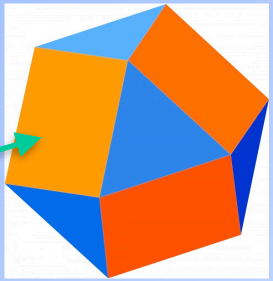
E qui è anche facile dire che *qualcosa* è il numero dei lati.

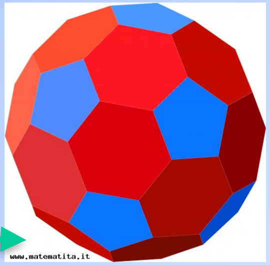
Anche la formula che dà la lunghezza *C* della circonferenza a partire dalla lunghezza *r* del raggio è del tipo

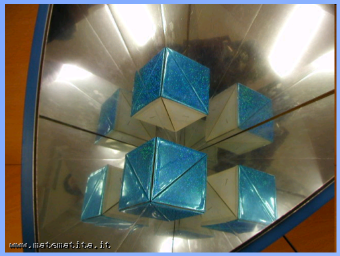
$$C = \text{qualcosa} \times r.$$

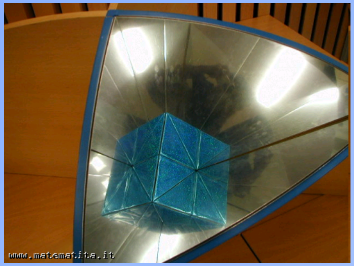
E (π che spunta…) questo qualcosa è legato a quello relativo all'area…

Idem per il volume.
I cubi sono tutti simili fra loro; così anche i tetraedri regolari; o i poliedri come il (3,4,3,4); o come il (5,6,6) del pallone da calcio.







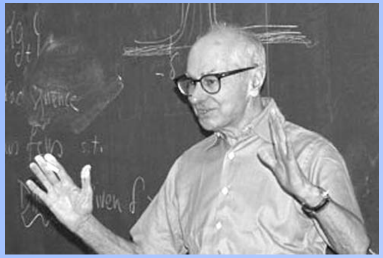


Per ciascuno di questi solidi sappiamo *a priori* che c'è una formula che dà il loro volume V a partire dal lato. Usando cubetti anziché quadratini, si può dire che sarà una formula del tipo:

$$V = \text{qualcosa x } l^3.$$

Anche le sfere sono tutte simili e la formula che dà il volume della sfera a partire dal raggio è del tipo:

$$V = \text{qualcosa x } r^3.$$



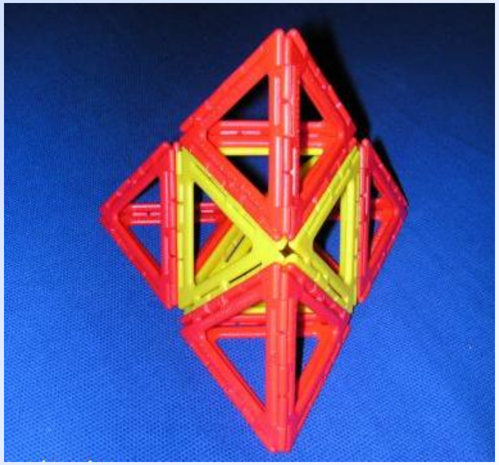
Serge Lang, *La bellezza della matematica*, Bollati Boringhieri, (*Che cos'è pi greco*?).

Geometria solida / geometria piana

L'*osservazione* di fatti geometrici parte giocoforza dal 3d e solo in un secondo momento arriva al 2d!

La sperimentazione con modelli concreti permette di imparare *con le mani* una serie di fatti geometrici (che poi andranno imparati *con la testa*…).

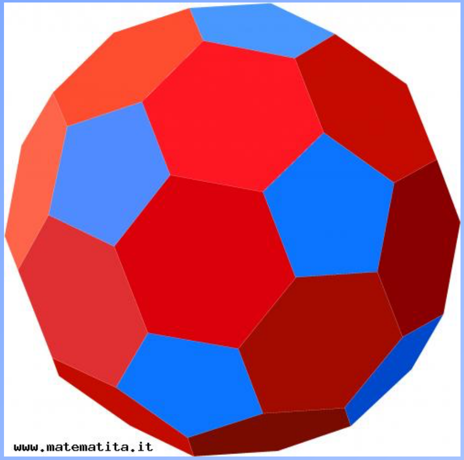
Due esempi dal discorso precedente:
- costruire un (5,6,6) (il *pallone da calcio)*;
- un problema sul volume.



Costruire un pallone da calcio

…

e toccare con mano che, conoscendo il lato, il volume è fissato (e quindi… ci sarà una formula…).



Un poliedro fatto così:

- le facce sono esagoni *regolari* e pentagoni *regolari*;
- in ogni vertice arrivano due esagoni e un pentagono: lo si può chiamare (5,6,6).

Chi ha *costruito* qualche poliedro sa bene che, fissata la lunghezza dello spigolo, cioè la *taglia* di esagoni e pentagoni, c'è *un solo* modo di costruire il pallone da calcio.

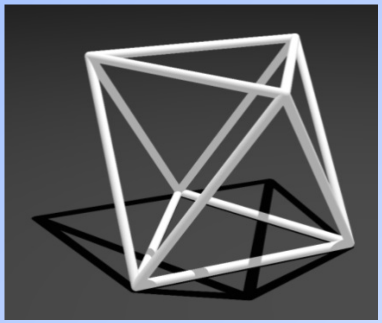
Provare per credere!

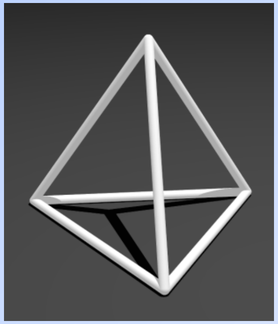
i modelli e la geometria che si fa con le mani!

Un problema sul volume

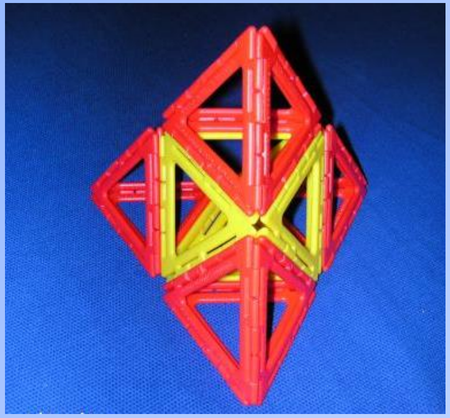
Trovare il rapporto fra i volumi di un ottaedro e di un tetraedro regolari di uguale spigolo.

Se si *guarda* (con occhi geometrici…) e si usa il ragionamento precedente sulla similitudine non c'è bisogno di formule e conti!





Il poliedro giallo è un ottaedro regolare (*perché*…).
Un tetraedro grande di lato 2*s* si decompone in un ottaedro di lato *s* e 4 tetraedri piccoli di lato *s*.



Vol(Tetr grande) = 4Vol(Tetr piccolo)+Vol(Ott)

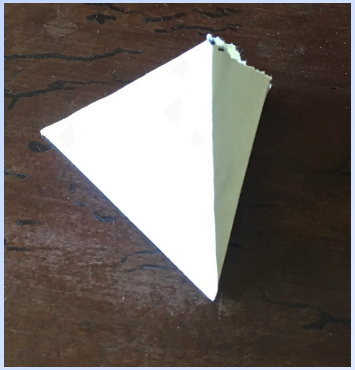
Vol(Tetr grande) = 8Vol(Tetr piccolo)

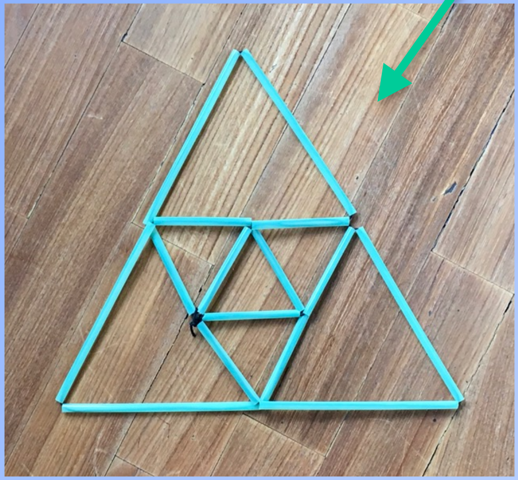
8Vol(Tetr gr) = 4Vol(Tetr picc)+Vol(Ott)

Vol(Ottaedro) = 4Vol(Tetraedro)

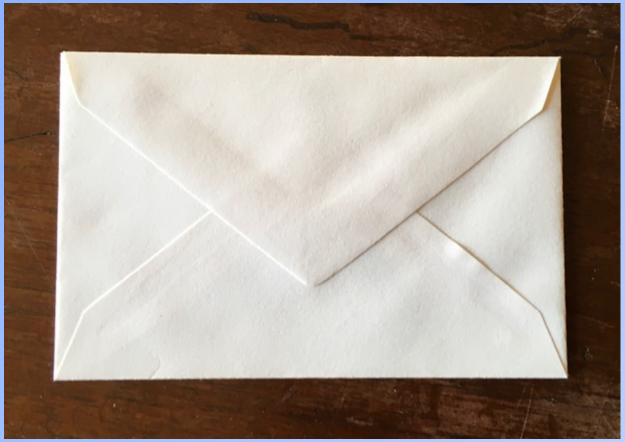
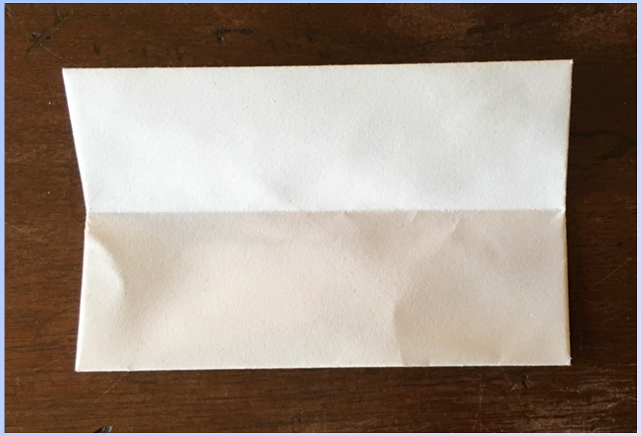
Qualche altro esempio

- il tetraedro regolare fatto di una busta;
- il triangolo di Munari;
- il dodecaedro di Steinhaus;
- …

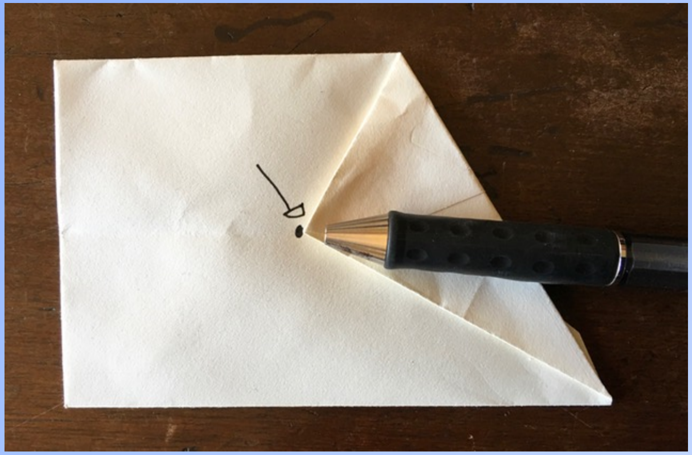




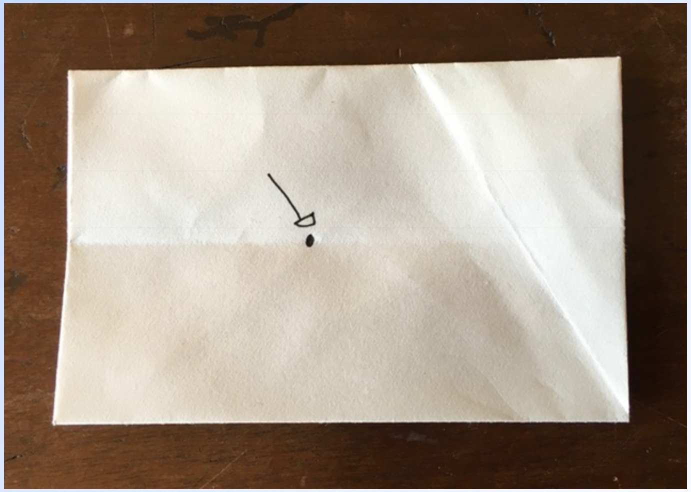
Come costruire un tetraedro regolare con una busta

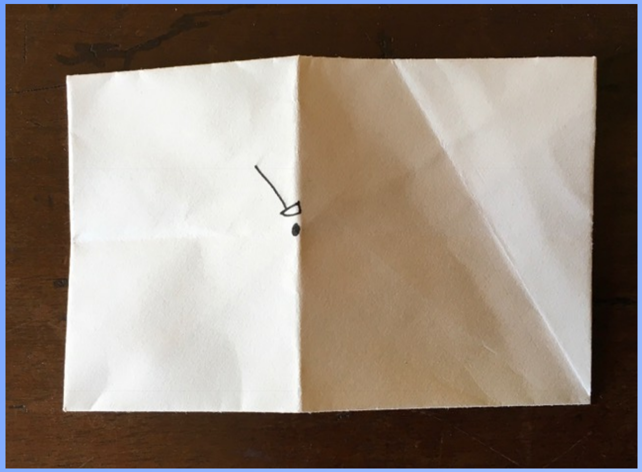




Una busta normale: la si chiude (incollando) e la si piega a metà per il lungo.

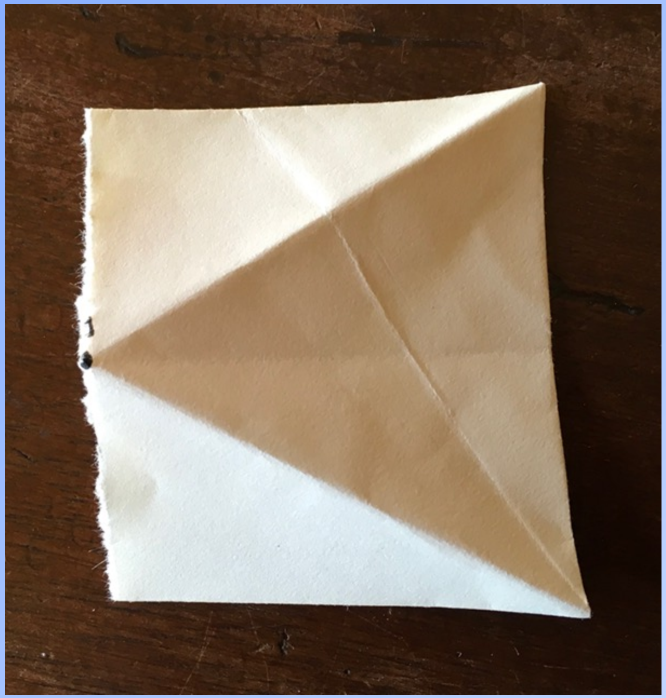


Si piega in modo che uno dei vertici coincida con un punto della linea mediana. Si segna questo punto.

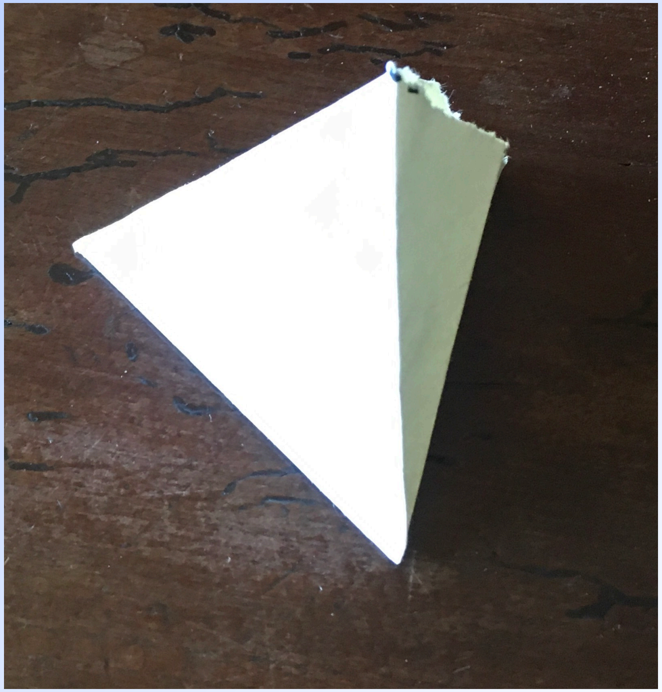




Si piega perpendicolarmente al lato lungo della busta, in modo che la piega passi dal punto segnato. Si taglia la busta lungo questa piega.



Si fanno due nuove pieghe che passano per il punto segnato sulla busta e per uno dei due vertici. Si apre e…
… un tetraedro regolare!



Grazie dell'attenzione!